

УДК 539.375:621.983

Фещук Ю. П.
Зайчук Н. П.
Гусачук Д. А.

ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ МІЦНОСТІ ОБОЛОНКОВИХ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ, ОДЕРЖАНИХ У ПРОЦЕСІ ГІДРОСТАТИЧНОГО ВИТЯГУВАННЯ

Процес гідростатичної витяжки різних виробів з листових заготовок полягає в деформуванні їх рідинним пуансоном по жорсткій матриці. Під дією тиску p рідини заготовка пластично деформується і набуває форму рівчака матриці.

Витяжка рідинним пуансоном по жорсткій матриці може проводитися без переміщення або з переміщенням фланця, проте в обох випадках можливе значне потоншування стінок деталей і нестійка течія фланця заготовки. Ці явища призводять до вираженої нерівномірності товщини стінок деталей і потоншення фланця.

Способи гідростатичної витяжки під дією тиску рідини знаходять обмежене застосування в промисловості. Більш поширена деформація листових заготовок під дією тиску еластичного середовища або тиску рідинного середовища, що передається заготовці через еластичну мембрану.

Гідростатичне штампування застосовується для деформації тонкостінних листових заготовок. Це дозволяє використовувати безмоментну теорію для аналізу процесу, а також вважати головні напруження рівномірно розподіленими по товщині заготовки. В такому випадку деформація плоскої листової заготовки під дією гідростатичного тиску без переміщення фланця (із затисненим фланцем) може розглядатися як двовісне розтягування листового матеріалу. Деформація заготовки відбувається тільки за рахунок її пластичного розтягування, що викликає стоншування заготовки.

Гідростатична витяжка без переміщення фланця використовується в основному для формозміни листових заготовок з невеликими ступенями деформації. Прикладами деталей, що виготовляються, можуть служити запобіжні мембрани, плоскі заготовки з різноманітними неглибокими рифтами і місцевими виступами. Витяжка гідростатичним тиском з переміщенням фланця може бути використана при виконанні першого переходу реверсивної витяжки.

Розрахункові схеми заміни реальних дефектів тріщинами ідеальної форми наведені в [1]. Ці схеми поширюються на оболонкові елементи конструкцій обладнання, яке підлягає розрахунку на тріщиностійкість [2].

При навантаженні твердого тіла, ослабленого тріщинами, в околиці вершин, як правило, виникають спочатку пружні, а далі й пластичні деформації. Оскільки розв'язок пружно-пластичних задач для тіл із тріщинами в строгій класичній постановці, коли спільно розв'язуються дві системи рівнянь (одна в пружній області, а інша в пластичній при невідомому контурі, що розділяє дані області), зустрічає значні труднощі. Тому значний інтерес представляють спрощені моделі, що узгоджуються з експериментальними даними. Так, стосовно до тонких пластин і оболонок, руйнуванню яких передують розвиток значних зон пластичних деформацій, досить ефективна δ_c -модель [9] і її аналоги [4, 11]. Аналог цієї моделі застосовувався для дослідження напруженого стану й граничної рівноваги циліндричних і ізотропних сферичних оболонок, ослаблених наскрізними тріщинами [3–6, 8]. Граничному стану пологої оболонки з тріщинами приділяється значна увага в [13]. В [12] розглянуто рівняння поперечно-ізотропної сферичної оболонки з тріщиною. У даній роботі, на підставі аналога δ_c -моделі й рівнянь уточненої теорії оболонок типу Тимошенко досліджена гранична рівновага трансверсально-ізотропної пружно-пластичної сферичної оболонки, ослабленої двома поверхневими, або ж двома наскрізними тріщинами.

Метою роботи є розробка способу визначення міцності оболонкових конструкцій, що оснований на розв'язку задачі про граничну рівновагу трансверсально-ізотропної оболонки із тріщинами.

Як відомо, будь-яким реальним конструкційним матеріалам притаманна дефектність будови. Це можуть бути як внутрішні дефекти, так і поверхневі. Як правило, дефекти характеризуються нерегулярністю геометрії, що ускладнює їх математичний опис. З метою максимального наближення розрахункових схем до реальних умов дефекти будови замінюють на математичні розрізи (тріщини), які є найбільш небезпечним видом дефектів з точки зору впливу на міцність конструкції (рис. 1).

Інтегральні рівняння задачі. Розглянемо математичну модель витягнутої заготовки як оболонку із двома однаковими поверхневими тріщинами, розташованими уздовж однієї прямої у плані лінії (рис. 2). Довжина тріщин – $2l_0$, глибина – $2d$, відстань між центрами тріщин – $2l_d$. Систему координат XOY направимо так, щоб лінія тріщин збігалася з віссю OX , а початок координат сполучимо із серединою відрізка $2l_d$. Напружено-деформівний стан оболонки симетричний відносно ліній $X=0$, $Y=0$. Зовнішнє навантаження, розміри тріщин і поведіння матеріалу оболонки передбачаються такими, що пластичні зони, що виникають у фронті тріщини, розвиваються вузькими смугами на продовженні тріщини по всій товщині оболонки. Позначимо довжину пластичних зон біля внутрішніх (ближніх) вершин через l_p , а біля зовнішніх вершин – через l^p . Відповідно до аналога δ_c -моделі [4], замінимо пластичні зони поверхнями розриву пружних переміщень і кутів повороту, а реакції матеріалу пластичних зон на пружний об'єм – відповідними зусиллями й моментами.

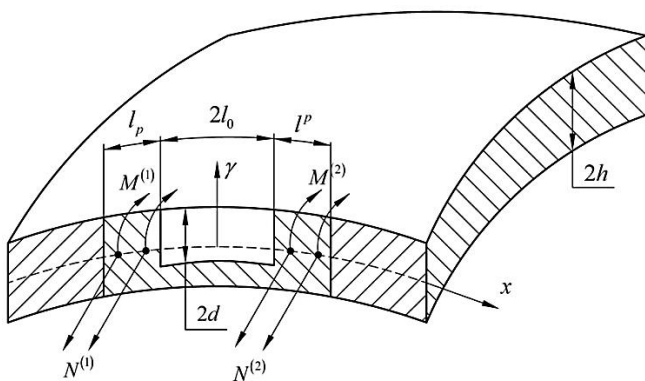


Рис. 1. Модель поверхневої тріщини в пружнопластичній оболонці

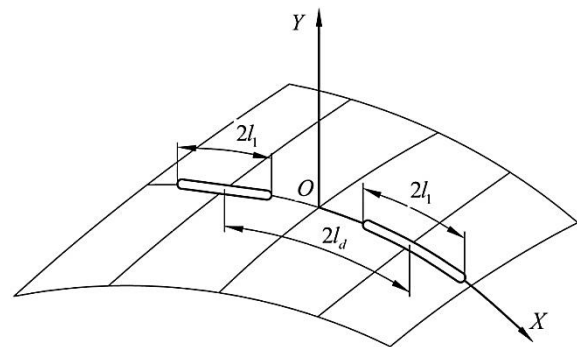


Рис. 2. Схема розташування тріщин

При цьому реакція пластичних зон на продовженні тріщини в глиб оболонки, тобто в області $|X| \in]l_d - l_0; l_d + l_0[$, $\gamma \in [-h; -h + 2d]$, постійні нормальні напруження $\sigma^0 = (\sigma_B + \sigma_T)/2$ (γ – координата, нормальна до серединної поверхні оболонки, σ_T – границя текучості; σ_B – межа міцності матеріалу). Реакції пластичних зон на продовженні тріщин уздовж їхньої довжини – невідомі зусилля $N^{(i)}$ й моменти $M^{(i)}$ ($i = 1, 2$), що задовольняють умови пластичності тонких оболонок.

Для ідеально пружнопластичних матеріалів як така умова може бути прийнята умова пластичного шарніра Треска:

$$\left[\frac{N^{(i)}}{2h\sigma_T} \right]^2 + \frac{|M^{(i)}|}{h^2\sigma_T} = 1 \quad (i = 1, 2), \quad (1)$$

де $i=1$ відповідає пластичним зонам у внутрішніх вершин тріщин;
 $i=2$ – у зовнішніх вершин тріщин;
 $2h$ – товщина оболонки.

Таким чином, у рамках прийнятої моделі, тривимірна пружнапластична задача про напружений стан оболонки з поверхневими тріщинами заданих розмірів, зведена до двовимірної задачі про пружний стан оболонки з фіктивними наскрізними тріщинами невідомої довжини $2l_1 = 2l_0 + l_p + l^p$ (довжина пластичних зон невідома), на берегах яких для зусиль і моментів обуреного напруженого стану, викликаного наявністю тріщин, виконуються умови:

$$\begin{aligned} N_2^+(x, 0) &= N_2^-(x, 0) = f_1(x); \\ M_2^+(x, 0) &= M_2^-(x, 0) = f_2(x), \quad |x| < x_1, \end{aligned} \quad (2)$$

Задачу про пружну рівновагу оболонки з наскрізними тріщинами вирішуємо за допомогою методу дисторсій [7]. Система диференціальних рівнянь трансверсально-ізотропної оболонки, що враховує зсув й наявність тріщин, має вигляд [7]:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla \varphi - D_0 l_1^2 / R \nabla^2 w &= -D_0 l_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varepsilon_{22}^0; \\ \nabla^2 \nabla^2 \omega + 1 / (DR) (l_1^2 - \varepsilon \nabla^2) \nabla^2 \varphi &= -l_1^2 \nabla^2 \chi_{22}^0; \\ (\nabla^2 - l_1^2 \mu^2) \psi &= 2 / \mu^2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \chi_{22}^0, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\text{де } \mu^2 = \frac{2}{\varepsilon(1-\nu)}; \quad \varepsilon = \frac{E}{G'} \cdot \frac{h^2}{3k'(1-\nu^2)}; \quad D_0 = 2Eh; \quad D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}; \quad \varepsilon_{22}^0 = \frac{1}{l_1} [\vartheta(x)] \delta(y);$$

$$\varepsilon_{22}^0 = \frac{1}{l_1} [\vartheta(x)] \delta(y); \quad \chi_{22}^0 = \frac{1}{l_1} [\gamma_2(x) \delta(y)]; \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \quad y = Y / l_1;$$

E – модуль пружності;

ν – коефіцієнт Пуассона;

G' – модуль зсуву в площинах, перпендикулярних до серединної поверхні;

k' – коефіцієнт зсуву;

R – радіус серединної поверхні оболонки;

$\delta(y)$ – функція Дірака;

$[\vartheta]$, $[\gamma_2]$ – стрибки компонентів переміщення серединної поверхні й кута повороту [7].

Нормальне зусилля N_2 й згинальний момент M_2 визначаємо через ключові функції $\varphi(x, y)$, $w(x, y)$, $\psi(x, y)$ за формулами:

$$N_2 = \frac{1}{l_1^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi; \quad M_2 = \frac{D}{l_1} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} \gamma_2 + \nu \frac{\partial}{\partial x} \gamma_1 - l_1 \chi_{22}^0 \right). \quad (4)$$

Використовуючи фундаментальний розв'язок рівнянь (3) [7] і операцію згортки, на підставі формул (4) побудоване інтегральне подання для N_2 й M_2 через невідомі прогини $[\vartheta]$ й $[\gamma_2]$. Вимагаючи тепер виконання на берегах фіктивних тріщин умов (2), одержуємо систему двох сингулярних інтегральних рівнянь:

$$\int_{-1}^1 [\Phi_1(\xi) K_{i1}(x, \xi) + \Phi_2(\xi) K_{i2}(x, \xi)] d\xi = f_i^*(x), \quad |x| < 1, \quad i = 1, 2. \quad (5)$$

Тут:

$$\Phi_1(\xi) = -\frac{E}{4\pi\sigma_T} \frac{1}{l_1} \frac{d}{d\xi} [\vartheta(\xi)]; \quad \Phi_2(\xi) = \frac{E}{4\pi\sigma_T} \frac{Rc}{l_1} \frac{d}{d\xi} [\gamma_2(\xi)];$$

$$K_{ii} = \sum_{m=1}^2 \left[a_{ii} / z_m + l_1 \bar{K}_{ii}^0(l_1 z_m) \right]; \quad K_{12} = K_{21} = -2 \sum_{m=1}^2 l_1 K_{12}^0(l_1 z_m);$$

$$\bar{K}_{ii}^0(l_1 z_m) = -2K_{ii}^0(l_1 z_m), \quad z_1 = \xi - x, \quad z_2 = \xi + x + 2 \frac{l_d}{l_1},$$

$$a_{11} = 1/2; \quad a_{22} = (1 - \nu^2)/2; \quad f_1^*(x) = -f_1 / (2h\sigma_T);$$

$$f_2^* = -f_2 / (2Rch\delta_C); \quad c = h / \left(R \sqrt{3(1 - \nu^2)} \right).$$

Ядра $K_{ij}^0(l_1 z)$ відповідають оболонці з однією тріщиною [7].

У системі інтегральних рівнянь (5) невідомі шість величин: $l_p, l^p, N^{(1)}, N^{(2)}, M^{(1)}, M^{(2)}$. Для повноти системи (5) будемо вимагати обмеженості зусиль і моментів у вершин фіктивних тріщин. Для цього досить, щоб коефіцієнти інтенсивності нормального зусилля й згинального моменту в обох вершин були дорівнюють нулю, тобто:

$$K_N^{(i)} = 0, \quad K_M^{(i)} = 0 \quad (i = 1, 2). \quad (6)$$

Крім цього вимагаємо виконання умов (1) у зонах l_p і l^p .

Інтегральні рівняння (5), разом з умовами (1), (6), дають повну систему для визначення стрибків узагальнених переміщень, невідомих зусиль $N^{(i)}$ і моментів $M^{(i)}$, а також довжин пластичних зон l_p і l^p . Однак, слід зазначити, що праві частини системи (5) – розривні функції (розриви зусиль і моментів у крапках, що розділяють реальну тріщину й пластичні зони). Як показав числовий аналіз, прямі методи числового розв'язку таких систем дають істотну погрішність у крапках розриву. Але саме в цих крапках нам має бути шукати розкриття реальної тріщини. Тому розв'язок системи (5) будемо у вигляді:

$$\Phi_i(\xi) = h_i(\xi) + R_i(\xi), \quad (i = 1, 2). \quad (7)$$

Тут $h_i(\xi)$ – розв'язок, що відповідають системі (5), канонічних інтегральних рівнянь:

$$\int_{-1}^1 \frac{h_i(\xi)}{\xi - x} d\xi = f_i^*(x) \quad (i = 1, 2), \quad (8)$$

задовольняючим умовам:

$$\int_{-1}^1 h_i(\xi) d\xi = 0. \quad (9)$$

У випадку, коли $N_2^0 = const$, $M_2^0 = const$ шукані функції $h_i(\xi)$ знайдені за допомогою формули обігу інтегралів типу Коші:

$$h_i(\xi) = \frac{4}{\pi^2(1 - \nu^2)\sqrt{1 - \xi^2}} \left[\pi D_i^0 \xi - \sum_{j=1}^2 D_i^j Z(\xi) \right], \quad (10)$$

де

$$D_i^0 = F_R^i(N_2^0, M_2^0); D_i^j = F_R^i(N^j, M^j), \quad j=1,2; i=1,2;$$

$$Z_j(\xi) = \mathfrak{G}_j^* \xi + (-1)^j q_j - \frac{1}{2} \sqrt{1-\xi^2} L^j(\xi); \quad k^* = h/(2Rc);$$

$$L_j(\xi) = \ln \left| \frac{1 - (-1)^j (\tau_j \xi - q_j \sqrt{1-\xi^2})}{1 - (-1)^j (\tau_j \xi + q_j \sqrt{1-\xi^2})} \right|;$$

$$q_j = \sqrt{1-\tau_j^2}; \quad \mathfrak{G}_\varphi^* \arccos \tau_j; \quad \tau_1 (l_1 - l_p) / l_1; \quad \tau_2 = (l_1 - l^p) / l_1.$$

Підставивши (7) в (5), з обліком (8), одержимо систему інтегральних рівнянь для визначення функцій $R_i(\xi)$:

$$\int_{-1}^1 [R_1(\xi) K_{i1}(x, \xi) + R_2(\xi) K_{i2}(x, \xi)] d\xi = g_i(x),$$

$$|x| < 1, \quad i=1,2. \quad (11)$$

Тут:

$$g_i(x) = g_i^0(x) + \sum_{p=1}^4 G_p g_i^{(p)}(x), \quad (12)$$

де $G_1 = N^{(1)} / (2h)$, $G_2 = k^* M^{(1)} / h^2$, $G_3 = N^{(2)} / (2h)$, $G_4 = k^* M^{(2)} / h^2$, $k^* = h / (2Rc)$;

$g_i^{(p)}(x)$ – безперервні функції, що виражаються через регулярні частини ядер K_{ij}^0 системи (5) і функції h_i .

Відповідно до (12), функції $R_j(x)$ шукаємо у вигляді:

$$R_j(x) = R_j^0(x) + \sum_{p=1}^4 G_p R_j^{(p)}(t). \quad (13)$$

Кожна пара $R_i^{(p)}$ ($i=1,2; p=\overline{0,4}$) є розв'язком системи інтегральних рівнянь (11) із правою частиною $g_i^{(p)}$ й задовольняє умовам:

$$\int_{-1}^1 R_i^{(p)}(\xi) d\xi = 0 \quad (i=1,2; p=\overline{0,4}). \quad (14)$$

П'ять систем інтегральних рівнянь типу (11) вирішуємо чисельно за допомогою методу механічних квадратур [1], що дозволяє звести задачу до розв'язку п'яти систем алгебраїчних рівнянь. Але величини l_p й l^p у ці системи ввійдуть нелінійно. Тому алгоритм розв'язку такий: задаємо значення l_p й l^p ; вирішуємо отримані системи алгебраїчних рівнянь. З умов (6) визначаємо $M^{(i)}$, $N^{(i)}$ і підставляємо їх в умови пластичності (1). Якщо останні задовольняються з наперед заданою точністю, то задача розв'язана. Якщо немає – певним чином міняємо значення l_p й l^p і процедуру повторюємо.

Інтегруючи розв'язок системи інтегральних рівнянь (5), розкриття тріщин знайдемо за формулою:

$$\delta(x, \gamma) = [\mathcal{G}(x)] + \gamma[\gamma_1(x)], \quad |x| < 1. \quad (15)$$

Прирівнявши $\delta(x, \gamma)$ до δ_c одержимо критеріальне співвідношення для визначення допустимих розмірів тріщин при заданому внутрішньому тиску в оболонковій конструкції або критичному навантаженні при заданих розмірах тріщин.

ВИСНОВКИ

Запропонований у роботі спосіб визначення міцності оболонкових конструкцій, що оснований на розв'язку задачі про граничну рівновагу трансверсально-ізотропної оболонки із тріщинами, застосуємо до розв'язку аналогічних задач для будь-якої оболонки із тріщинами, для якої відомо фундаментальний розв'язок.

Як показав проведений числовий аналіз, із ростом параметра кінцевої зсувної жорсткості E/G розкриття тріщин збільшується. Встановлено, що ріст внутрішнього тиску й довжин тріщини приводить до зменшення впливу параметра E/G на розкриття берегів тріщин.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Каландия А. И. *Математические методы двумерной упругости* / А. И. Каландия. – М. : Наука, 1973. – 304 с.
2. *Критическое раскрытие трещин при квазихрупком и хрупком разрушении* / С. В. Серенсен [и др.] // *Автоматическая сварка*. – 1975. – № 2. – С. 1–6.
3. Кушнір Р. М. *Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами* / Р. М. Кушнір, М. М. Николишин, В. А. Осадчук. – Львів : СПОЛОМ, 2003. – 318 с.
4. Николишин М. М. *Напряженное состояние упругопластических оболочек с несквозными трещинами* / М. М. Николишин // *Мат. методы и физ.-мех. поля*. – 1992. – Вып. 35. – С. 147–151.
5. Николишин М. М. *Предельное равновесие трансверсально-изотропной сферической оболочки с двумя поверхностными трещинами* / М. М. Николишин, В. И. Швабюк, Ю. П. Фещук // *Прикладная механика*. – 2009. – 45, № 4. – С. 109–115.
6. Николишин М. М. *Предельное равновесие сферической упругопластической оболочки с двумя коллинеарными трещинами* / М. М. Николишин, Т. Е. Маселко // *Пробл. прочности*. – 1994. – № 8. – С. 24–28.
7. Осадчук В. А. *Напряженно деформированное состояние и предельное равновесие оболочек с разрезами* / В. А. Осадчук. – К. : Наук. думка, 1985. – 224 с.
8. Фещук Ю. П. *Замкнута трансверсально-ізотропна циліндрична оболонка з поздовжньою тріщиною* / Ю. П. Фещук // *Наукові нотатки Луцького національного технічного університету : міжвузівський збірник*. – Луцьк : ЛНТУ, 2009. – Випуск 25. – С. 395–401.
9. Dugdale D. S. *Yielding of steel sheets containing slits* / D. S. Dugdale // *J. Mech. and Phys. Solids*. – 1960. – 8, № 2. – P. 100–104.
10. Erdogan F. *Ductile fracture of pipes and cylindrical containers with circumferential flaw* / F. Erdogan, F. Delale // *Trans. ASME. Ser. J, J. Pressure Vessel Technol.* – 1981. – № 103. – P. 160–168.
11. Erdogan F. *Plastic strip model for thin shells* / F. Erdogan // *Prospects Fract. Mech.* – Leyden, 1974. – P. 609–617.
12. Khoma I. Yu. *Complex representation of the equations of a transversely isotropic spherical shell with prestresses* / I. Yu. Khoma // *Int. Appl. Mech.* – 2007. – 43, № 2. – P. 228–237.
13. *Limit analysis of a shallow shell with a system of arbitrarily located cracks* / R. M. Kushnir, M. M. Nykolyshyn, M. Yo. Rostun, Yu. P. Feshchuk // *Shell Structures : Teory and Applications : Proceedings of the 8TH SSTA conference, Jurata, Poland, 12–14 October 2005*. – P. 139–142.

Фещук Ю. П. – канд. техн. наук, ст. викладач ЛНТУ;

Зайчук Н. П. – канд. техн. наук, доц. ЛНТУ;

Гусачук Д. А. – канд. техн. наук, доц. ЛНТУ.

Луцький НТУ – Луцький національний технічний університет, м. Луцьк.

E-mail: miomt@meta.ua

Стаття надійшла до редакції 01.03.2012 р.